# GEHÖRT DIE NULL ZU DEN NATÜRLICHEN ZAHLEN?

Hans-Christian Reichel, Universität Wien

„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." Dieser Satz L. KRONECKERs[1] drückt auf den ersten Blick jene Unbekümmertheit gegenüber dem „Wesen" der natürlichen Zahlen aus, wie sie wohl auch dem mathematischen Laien und durchaus auch dem Mathematikunterricht zukommt bzw. zukommen sollte. Das primär zu Erlernende ist die Art, wie man korrekt und sinnvoll mit ihnen umgeht: der Weg vom einfachen Zählen zur Arithmetik und zu einfachen Struktursätzen (etwa über Primzahlen); sowie — später — zur Zahlentheorie.

Kulturgeschichtliche und historische Aspekte gehören dazu, nicht aber Fragen nach einer logischen und mengentheoretischen Begründung, die letztlich „nur" dazu dienen, Verdachtsmomente auf mögliche Widersprüche auszuräumen, die ohnehin kein Schüler hegt.

Freilich gehört es andererseits zu den Pflichtaufgaben der Mathematiker, das „Gebäude" der Zahlen und — damit zusammenhängend — der Analysis systematisch und widerspruchsfrei aufzubauen. Leider wurden bekanntlich die diesbezüglichen Methoden der Mathematiker — naturgemäß verwässert bzw. falsch — in den 50er- und 60er-Jahren in den Mathematikunterricht hineingetragen. Die Fehler dieser "New Math" wurden inzwischen hinlänglich oft diskutiert (siehe z.B. [TH] u.v.a.) bzw. ausgeräumt. (Die Lehrpläne fast aller Länder und die neuere Schulbuchliteratur haben die von "New Math" und allzu sehr betonter Strukturmathematik falsch gesetzten Schwerpunkte wieder zurückgenommen.)

Die natürlichen Zahlen haben in der 5. Schulstufe (1. Klasse HS und AHS) wieder ihren „naiven", aber sehr tragfähigen Charakter und bedürfen zu ihrer Begründung keiner sogenannten Mengenlehre mehr.

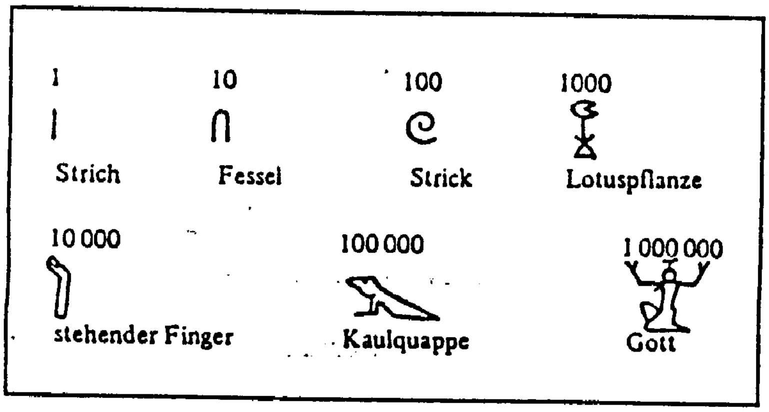
Die Frage, ob die Null zu den natürlichen Zahlen gehört oder nicht, kann man — wie es ihr auch wesensmäßig zukommt — der bloßen Übereinkunft überlassen. Und tatsächlich wurde eine solche Entscheidung nun „von höherer Seite" (der ÖNORM) getroffen:

Die natürlichen Zahlen beginnen bei 0: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, für die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$

---

[1] Leopold KRONECKER (1821 - 1891) war Privatgelehrter, dann an der Universität Berlin und — wenn man so will — „Großvater" des Intuitionismus.

kann allenfalls das Zeichen $\mathbb{N}^*$ verwendet werden.
Diese Regelung entspricht auch dem Usus der Internationalen (wissenschaftlichen) Mathematik und muß (laut Verordnung über Schulbücher und ÖNORM) Eingang in die Schulbuchliteratur finden. In der ab Herbst 1991 aufsteigend vorliegenden Aktualisierung der Unterstufenbücher findet sich daher nun auch diese Korrektur; die Notation wird nun also den weiterführenden Schulen angeglichen, was freilich auch einige methodisch-didaktische Änderungen (vor allem in der 1. Klasse) mit sich bringt. Doch über die tägliche Schulpraxis hinausgehend wird Sie möglicherweise der Grund und der Hintergrund interessieren, der der im Titel genannten Frage zugrunde liegt. Und diesen sollen nun einige Worte gewidmet sein.
Während sich Ägypter und Babylonier mit einer — wenn auch hochentwickelten — Rechentechnik begnügten, beginnen die Zahlen bei den Pythagoreern[2] philosophische Bedeutung anzunehmen: das gesamte Universum ist nach pythagoreischer Auffassung durch Zahlen und deren Verhältnisse charakterisiert. Damit entsteht das Problem, was eine Zahl sei. EUKLID aber fixierte in seinen Elementen (VII.2): „Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge" (Vielheit) (Zitat nach [EHH]). Und tatsächlich spielt die Frage nach der „Einheit" („Eins") bei den Griechen auch im folgenden eine wesentliche Rolle, insbesondere auch in philosophisch-epistemologischer Hinsicht. Auch unsere Titelfrage fragt letzlich eben nach dieser „Ureinheit", nach dem „eigentlichen Ursprung" der natürlichen Zahlen.

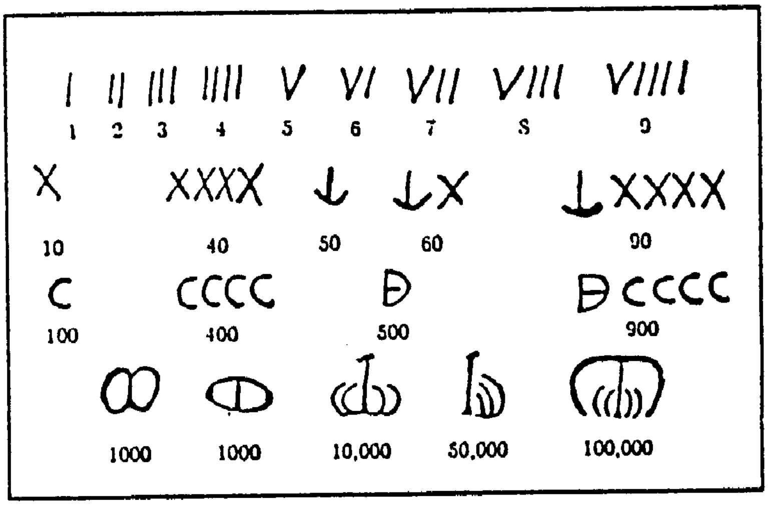



Zahlenzeichen der Ägypter (nach [KN])

[2] Die Pythagoreer waren eine „mönchsartig" geordnete Gelehrtenschule, die durch ihre Untersuchungen über Zahlverhältnisse, Musik und Naturphänomene diese Erfahrungs- und Wissensgebiete grob gesagt zu „Wissenschaften" machten. Dazu gehört außer einer systematischen Frage nach Beweisen und korrekten Schlüssen auch die Beschäftigung mit Philosophie und der philosophischen Relevanz konkreter (Sach-)Ergebnisse. Der Gründer und Meister dieser „Schule" war PYTHAGORAS, der um 500 v.Chr. in Oberitalien lebte, wohin er (nach Studienreisen nach Ägypten und wahrscheinlich Babylon) aus politischen Gründen von Griechenland aus floh. Von ihm stammen viele mathematische Sätze, nur nicht der „Satz des Pythagoras". Dieser war schon vorher den Chinesen und Indern bekannt, doch hatten sie wahrscheinlich keine Beweise. (Näheres entnehme man dem Buch der 4. Klasse.)

Die Griechen faßten diese „Einheit", die „Eins", wie gesagt, als etwas „sui generis" auf, etwas „nicht Zahlenhaftes". Das Zählen beginnt bei ihnen sozusagen erst mit der Aneinanderreihung der „Einheit". Tatsächlich fassen die Griechen demnach erst die Zahlen $2, 3, 4, \ldots$ als „natürliche Zahlen" auf. Die natürlichen Zahlen begannen also (sozusagen definitionsgemäß) erst bei 2. Brüche behandeln sie als Zahlverhältnisse (lat.: rationes), irrationale Zahlen als inkommensurable Größenverhältnisse der Geometrie. (All dies findet sich genauer und unterrichtsmäßig aufbereitet in den „gründgedruckten Blöcken" unserer Mathematikbücher der AHS und der HS an den jeweils passenden Stellen.)

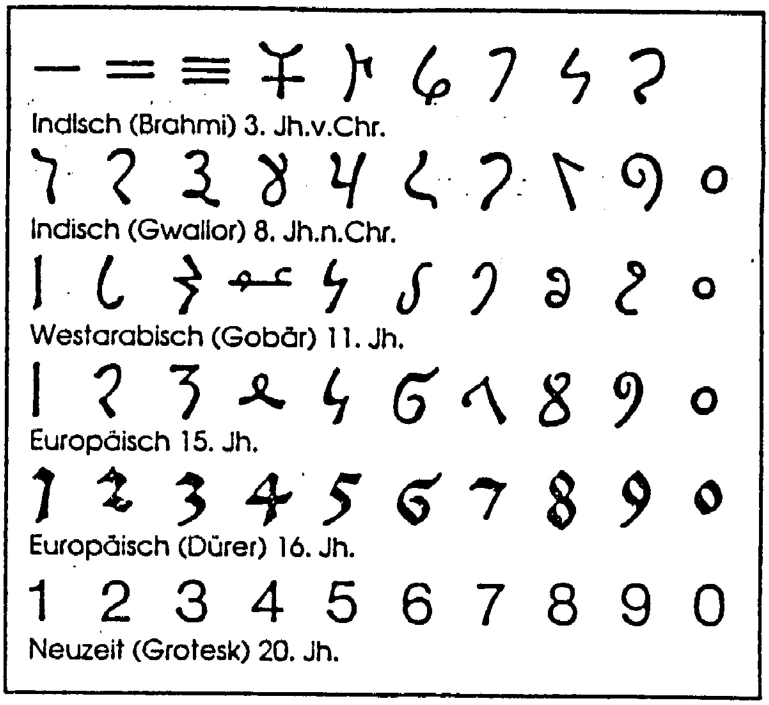
Die Null war den Griechen und Römern als Zahl nicht geläufig. Es gab kein Zahlzeichen, nötigenfalls wurde in einem Text das Wort „nullum" (lat.) bzw. *ουδ-εν* (gr.) für „nichts" verwendet. (Vom Anfangsbuchstaben dieses griechischen Wortes leitet sich auch wahrscheinlich das Zeichen 0 als Lückenzeichen ab.)




Römische Zahlenzeichen (nach [KN])

Als Positionszeichen in der Dezimalnotation entsteht die Null bei den Indern etwa um 300 v. Chr., wahrscheinlich unter babylonischem Einfluß. Um diese Zeit entstanden bei den Indern ja auch die Ziffern und -symbole für $1, 2, \ldots 9$ des Dezimalsystems. Diese wurden dann von den Arabern übernommen und — nicht zuletzt von den Arabern — über Spanien (z.B.) nach Europa gebracht, wo sie ja bis heute unter dem Namen „arabische Ziffern" fungieren.

Auch das Wort „Ziffer" leitet sich ja aus dem Arabischen ab: die Araber gebrauchten nämlich „al-sifr" für die Null, aus dem das Wort „cifra" abgeleitet wurde, was übrigens auch bei C.F. GAUSZ die Bedeutung „null" besitzt (z.B.: [EHH] p. 12). Als Zeichen für Null ist bei den Indern ein Punkt oder ein Kreis zu finden.




Was hat all dies mit unserem Thema zu tun? Nun, es ist interessant, daß die Mathematiker seit Beginn ihrer Wissenschaft mit Zahlen operierten und Sätze über Zahlen fanden, ohne die erst im 19. Jahrhundert gestellte Frage, was Zahlen seien, aufzuwerfen. [Dies ist auch pädagogisch interessant, weil viele Didaktiker starke Parallelen sehen zwischen der historischen Entwicklung eines Begriffes und dem sinnvollsten „Erwerb" des Begriffes durch die Schüler. Auch dies ein Grund, warum wir Lehrer vertiefende Kenntnisse über die historische Entstehung mathematischer Begriffe und Ideen haben sollten. Freilich ist der (abgekürzte) historische Weg umgekehrt nicht immer der beste methodische. — Ein wesentliches Thema der Didaktik, das freilich den Rahmen dieses Artikels sprengte (Beiträge hiezu u.a. in den Zeitschriften „Didaktik der Mathematik" und „Journal für Mathematikdidaktik").] Doch zurück zu unserem Thema:

## Die natürlichen Zahlen als Fundament der Analysis

Im 19. Jahrhundert entstand das Bedürfnis, das im 17. und 18. Jahrhundert (formal „naiv", aber mächtig und äußerst wirkungsvoll) aufgetürmte Gebäude der Analysis von auffälligen Ungereimtheiten und Lücken zu befreien und zu präzisieren. Einer der ersten und wohl wichtigsten „Anfänge" dieser Problematik findet sich bei B. BOLZANO (1781 - 1848) einerseits in seinen „Paradoxien des Unendlichen", andererseits bei seiner „Begründung" (Definition) des Stetigkeitsbegriffes reeller Funktionen im Rahmen seiner Untersuchungen und seines Beweises des sogenannten Zwischenwertsatzes (bzw. Nullstellensatzes) (siehe z.B. die historischen Anmerkungen in unseren Büchern der 6. und 7. Klasse).

A. CAUCHY, K. WEIERSTRASS, B. RIEMANN und G. CANTOR verdanken wir im weiteren wohl die wichtigsten Schritte auf dem Weg zu einer Exaktifizierung der Analysis im 19. Jahrhundert. Klarerweise war eine der Grundfragen hiezu die Frage nach einem mathematisch brauchbaren und einigermaßen „exakten“ Zahlbegriff. Insbesondere mußte natürlich das „Kontinuum“, die reellen Zahlen (und hiebei wieder insbesondere die irrationalen Zahlen), exakt und formal „korrekt“ ohne Zuhilfenahme bloß „anschaulich intiuitiver“ Wendungen beschrieben werden. Tatsächlich gelang es (z.B. R. DEDEKIND, A. CAUCHY, G. CANTOR u.a.), die irrationalen Zahlen in eleganter Weise auf die rationalen Zahlen zurückzuführen (Dedekindsche Schnitte, Cauchyfolgen)[3]. Die Algebra lehrt ferner, wie man die rationalen auf die ganzen Zahlen definitorisch zurückführen kann, und diese schließlich auf die natürlichen Zahlen, die solcherart also das Fundament — auch der Analysis — darstellen. Es ist daher kein Wunder, daß zu Ende des 19. Jahrhunderts die Frage nach dem Wesen der natürlichen Zahlen virulent und fundamental wurde.

*Richard Dedekind*
*im Alter von 55 Jahren*

[3]Siehe die Bemerkungen in unserem Buch der 6. Klasse. Ensprechendes über die komplexen Zahlen findet sich ausführlich in §1 der 7. Klasse!

Man suchte nach einem möglichst einfachen und anschaulichen „Fundament" des Zahlbegriffes. Zur Lösung dieser Frage standen zwei Wege zur Diskussion: die Rückführung der natürlichen Zahlen auf a) die Logik oder b) die eben vorher (ab etwa 1880) von G. CANTOR geschaffene Mengenlehre.
Beide Gebiete wurden in gewissem Sinn als „elementarer" als alles andere empfunden und scheinen sich als „Heimat", als „Urgrund" einer Definition zu eignen.
Die formale Rückführung der Zahlen auf die Logik wurde von G. PEANO, B. RUSSELL, D. HILBERT u.a. vertreten[4], der zweite Weg, die Begründung der Zahlen aus dem Mengenbegriff von R. DEDEKIND (1831 - 1916), („Was sind und was sollen die Zahlen?", seit 1888 in vielen Auflagen erschienen!) und G. CANTOR (1845 - 1918), der mit R. DEDEKIND enge wissenschaftliche Kontakte pflegte. Auf R. DEDEKIND geht auch der bekannte Satz zurück, demzufolge alle Zahlen — also auch die natürlichen — eine „freie Schöpfung des unerschöpflichen Geistes" sind, ein „Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter aufzufassen". (Man beachte den Gegensatz zur eingangs zitierten und eben auch grundlagentheoretisch verschiedenen Auffassung L. KRONECKERs!)

Bernard Bolzano

Georg Cantor

Auf G. FREGE (1848 - 1915) und G. CANTOR geht nun konkret die Definition der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen endlicher Mengen zurück, wie sie — der "New Math" entsprechend — noch bis vor kurzem in den Mathematikbüchern gelehrt wurde: als „Mächtigkeiten" („Kardinalzahlen") der endlichen Mengen. Dafür mußte den natürlichen Zahlen aber natürlich methodisch ein „Gleichmächtigkeitsbegriff" für Mengen vorangehen, vor allem aber — und das unterblieb naturgemäß im Unterricht — muß man ja vorher sagen, was eine endliche Menge ist. Und dies natürlich ohne etwa schon die natürlichen Zahlen hiefür zu benützen. Und tatsächlich liegt hier auch eine wesentliche Leistung R. DEDEKINDs: er definierte eine Menge M als endlich, wenn sie nicht gleichmächtig mit einer echten Teilmenge von M ist. (Die Menge

[4] Auch dieser Weg benötigt letztlich die Mengenlehre!

$\{1,2,3,\ldots\}$ ist hingegen mit z.B. $\{2,4,6,\ldots\}$ gleichmächtig; und Analoges gilt daher für alle unendlichen Mengen.) — All das benötigt man also für eine lückenlose Begründung der natürlichen Zahlen.

Die Null tritt dann folgerichtig als Mächtigkeit der leeren Menge auf, die dann eben auch vorher thematisiert werden muß.

Im Unterricht wurde all dies zwar angeschnitten, aber eben doch nur lückenhaft. Und überdies besteht die didaktische Frage, ob die Begründung der natürlichen Zahlen aus dem Mengenbegriff tatsächlich kindgemäß ist, wie es verschiedentlich angepriesen wurde. Es war eben der Fehler der "New Math" der 70er-Jahre zu meinen, daß der Weg einer logisch abgesicherten Begründung, wie ihn die Wissenschaft ging, auch der unterrichtsgemäßeste sei (ganz allgemein — also auch die Oberstufe betreffend — ein Irrweg, wie die Didaktiker heute wissen).

G. PEANO (1858 - 1932) ging nun einen ganz anderen Weg zur „Fundierung" der natürlichen Zahlen. Ihm ging es um eine rein formallogische Grundlegung der natürlichen Zahlen, um eine Beschreibung durch eine formale Sprache (wodurch man dann auch Widerspruchsfreiheitsbeweise[5] u.a. erwarten kann). G. PEANO folgte dem damals erfolgreichen Weg der axiomatischen Definition, die nicht inhaltlich „greifbar" auf das „konkrete Wesen" der zu definierenden Dinge abzielt (wie etwa Definitionen klassisch-aristotelischer Art: Oberbegriff und Differentia specifica), sondern auf formale Art und Weise. Ausgangspunkt ist die Beschreibung, wie man mit den natürlichen Zahlen korrekt operiert. (So wie ja auch etwa beim Schachspiel die Figuren durch die ihnen erlaubten Züge und nicht etwa durch ihre gestaltliche Beschaffenheit definiert werden!)


Gottlob Frege


Giuseppe Peano

[5]Aus K. GÖDELs Unvollständigkeitssatz folgt, daß solche innerhalb des gegebenen Kalküls unmöglich sind. G. GENTZEN gelang allerdings in den 30er-Jahren ein Widerspruchsfreiheitsbeweis der (Peano-)Arithmetik. Dazu benützte er jedoch die transfinite Induktion, die über die Peano-Axiome hinausreicht.

In jeder derartigen Definition durch Axiome treten (nicht weiter beschriebene, aber der Vorstellungskraft leicht zugängliche) Grundbegriffe auf. Bei den sogenannten Peano-Axiomen der natürlichen Zahlen ist es a) die Eins (1) und b) der „Nachfolger“: Die definierenden Axiome lauten bekanntlich:

(1) 1 ist eine „natürliche Zahl“.

(2) Jede natürliche Zahl $n$ hat einen Nachfolger $n'$.

(3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(4) Wenn zwei Nachfolger gleich sind, also $n' = m'$, dann auch deren Vorgänger: $n = m$.

(5) Wenn $A$ eine Teilmenge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist, und wenn (a) $1 \in A$ und (b) aus $n \in A$ immer auch $n' \in A$ folgt, dann ist $A = \mathbb{N}$.[6]

Diese Axiome sichern, daß unsere Vorstellung sprachlich einwandfrei wiedergegeben ist und schließt z.B. die Möglichkeit von Schleifen aus.
(5) „sichert“ die Unendlichkeit der Menge $\mathbb{N}$, usw.[7]
Das freilich wichtigste Resultat, ohne welches die Axiome wertlos wären, besagt — und dies muß bewiesen werden —, daß je zwei „konkrete“ (Standard-)Modelle dieses Axiomsystems isomorph sind, daß es also — bis auf allfälliges „Umtaufen“ der Objekte — nur ein System der natürlichen Zahlen geben kann.
Auf diesem Axiomensystem fußt also die Zählung der natürlichen Zahlen von 1 an.
Nun sichern die Peano-Axiome zwar die Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen und eine formal korrekte Arithmetik, aber ein Existenzbeweis bleibt offen (wie natürlich auch der wenigstens relative Widerspruchsfreiheitsbeweis). Und diese beiden Probleme lösen sich nun aus einer Idee J. v. NEUMANNs (1903 - 1957).
Er konkretisierte bzw. interpretierte die Grundbegriffe der Peano-Axiome im Reich der Mengenlehre, d.h. durch Interpretations mittels „Objekten“, welche innerhalb der Mengenlehre eine konkret-faßliche Bedeutung haben.
(Wenn nun die etwa durch ZERMELO und FRAENKEL u.a. ebenfalls axiomatisch definierte Mengenlehre widerspruchsfrei ist, muß es dann also auch die Peano-Arithmetik sein, ein typischer relativer Widerspruchsfreiheitsbeweis!)
Diese Interpretation J. v. NEUMANNs aber erweist sich wie wir sehen werden als sinnvoller und einfacher, wenn man auch die Null zu den natürlichen Zahlen rechnet, wenn man also „bei Null beginnt“ (was in der Mathematik seither üblich ist).

[6] Dieses „Induktionsaxiom“ ist Grundlage des Beweises durch vollständige Induktion (früher: 5. Klasse, siehe auch [RE]). Hier in der Sprache der Prädikatenlogik 2. Stufe formuliert, wird es in der sogenannten Peano-Arithmetik meist (als Axiomenschema) in der Prädikatenlogik 1. Stufe formuliert. Es kommt dann ohne den Mengenbegriff aus.

[7] Historisch gab G. PEANO neun Axiome an. In dieser Form bilden sie — zusammen mit den ebenfalls axiomatisch rekursiven Definitionen der Addition und Multiplikation — die sogenannte Peano-Arithmetik.

Nun also diese Interpretation („Modell von $\mathbb{N}$ innerhalb der Mengenlehre"):

**1. Schritt:**

0 entspricht der leeren Menge $\emptyset$ (oder $\{\}$, wie es im Mathematikunterricht üblich ist), $\emptyset$ hat aber im Reich der Mengenlehre eine wohldefinierte Bedeutung.

**2. Schritt:**

Nun folgt weiter aus den Axiomen der Mengenlehre, daß wenn $A$ eine Menge ist, auch $B = \{A\}$ eine (stets einelementige) Menge ist. Wir können also nach dem 1. Schritt die Menge $\{\emptyset\}$ bilden, die nun mit $\{0\}$ identisch ist. Sie soll $\underline{1}$ heißen. Und so geht es analog fort: $\{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ soll $\underline{2}$ heißen, $\{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \underline{3}$ usw.

Der „Nachfolger" von $n$ wird also in diesem mengentheoretischen Sinn durch $n' = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ definiert.

Schließlich folgt aus den Regeln (Axiomen) der Mengenlehre, daß in diesem „Modell" von $\mathbb{N}$ <u>alle</u> Peano-Axiome erfüllt sind, und wir haben also ein logisches <u>Modell</u>, eine <u>Konkretisierung</u> der natürlichen Zahlen im Reich der Mengenlehre.

Und dies entspricht dem Grundlagenstandpunkt, demzufolge möglichst die gesamte Mathematik letztlich auf die Mengenlehre zurückgeführt werden soll, damit man jegliche (logisch-philosphische) Grundlagenproblematik einzig <u>dort</u> ansiedeln muß (siehe etwa bei BOURBAKI).

Daß dieses „philosophische" Anliegen im Mathematikunterricht wohl wenig zu suchen hat, scheint heute zwar klar, steckte aber letztlich doch durchgehend in der New-Math-Reform der 70er-Jahre und scheint erst in den letzten Jahren überwunden.

Heute weiß man überdies, daß sich wichtige Gebiete der Mathematik diesem Fundierungsprogramm nicht unterwerfen lassen, insbesondere nicht die Teile der Angewandten Mathematik, die heute die sogenannte „Strukturmathematik" von der Bedeutung her weit überragen.

Auch in der Mathematik verlagern sich Schwerpunkte und Bewertungen nach Mode und Nachfrage. Freilich bedeutet das aber nicht, daß Mengentheorie, Topologie, Algebra usw. bedeutungslos wären, aber auch bei diesen Gebieten gewinnen Anwendungsfragen vielfach die Oberhand, und dies sollte sich auch im Mathematikunterricht widerspiegeln.

## Literatur

[BE] Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung; Suhrkamp TBW 114, 1. Auflage 1975.

[CI] Cigler, J.: Grundideen der Mathematik; BI 1992.

[EHH] Ebbinghaus, M.D., Hermes H., Hirzebruch, F. u.a.: Zahlen; Springer 1983 (Grundwissen Mathematik I).

[HE] Heuser, H.: Analysis I, II; Teubner 1982 (1. Auflage)[8].

[KN] Kaiser, H. u. Nöbauer, W.: Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht; Verlag Hölder-Pichler-Tempsky 1984.

[RE] Reichel, H.-C.: Vollständige Induktion und die natürlichen Zahlen im Mathematikunterricht der Oberstufe; Didaktik-Reihe der österreichischen Math. Ges. 5 (1988) (S. 133 - 154).

[RH] Reichel H.-C. u. Humenberger, J.: Fundamentale Ideen der Mathematik im Unterricht; BI 1994.

[TH] Thom, R.: Modern Mathematics, an educational and philosophical error? Amer. Scientist 59 (1971). Übersetzt in: Otte, M.: Mathematiker über Mathematik; Springer 1974.

Anschrift des Verfassers:
Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans-Christian Reichel
Institut für Mathematik der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien

[8] Ich verweise insbesondere auf ca. 80 Seiten Anhang „Ein historischer ‚Tour d'horizon' ".